$a \leq B$

A υποσύνολο ενός διατεταγμένου συνόλου E

$a \in A$, a ~~ψ~~ ψευδομέγιστου του A $\Leftarrow$

$\overset{\text{Ορ.}}{\Longleftrightarrow}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{δεν } \exists \text{ στοιχείο} \\ x \in A \text{ τ.ω} \\ x > a \end{array} \right.$

Αυτό σημαίνει ότι. Αν υπάρχει $x \in A$:
$: x \geq a \Rightarrow x = a$

$B \in A$, B ψευδοελάχιστο του A $\overset{\text{Ορ.}}{\Longleftrightarrow}$

$\Longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{δεν } \exists \text{ στοιχείο} \\ y \in A, \text{με } y < B \end{array} \right.$

Αυτό σημαίνει ότι αν $\exists$ $y \in A$
$y \leq B \Rightarrow y = B$

Πρόταση

Έστω E διατετ. σύνολο, $a \in E$ ε A είναι το σύνολο των στοιχείων του E που αφήνονται μόνο της διάταξης με το α.

ν.δ.ο

α ψευδομέγιστο του $E \iff \alpha = \max A$

β ψευδοελάχιστο του $E \iff \beta = \min A$

Αποδ ($\Longrightarrow$)

α ψευδομέγιστο του E

x τυχόν στοιχείο του A. Τότε

$x \leq \alpha$ ή $\alpha \leq x$

Αν $\alpha \leq x \xRightarrow{\alpha \text{ ψευδομ.}} \alpha = x$

Τελικά $\forall\, x \in A$ ισχύει: $x \leq \alpha$, $\alpha \in A$

Άρα $\alpha = \max A$

Αποδ

Έστω $\alpha = \max A$. Θ.δ.ο α ψευδομέγιστο του E

Έστω ότι α δεν είναι ψευδομέγιστο. Άρα υπάρχει στοιχείο $x \in E$, με $x > \alpha$

Άρα $x \in A$

$\xRightarrow{\alpha = \max A} x \leq \alpha$; Άτοπο!

Π.χ

$\mathbb{R}^+$ σύνολο των θετικών πραγμ. αριθμών

$x \leq y \iff 3x \leq y$ ή $x = y$

α) Ν.δο η ≤ είναι μη γραμμική διάτα-
ξη στο $\mathbb{R}^+$

β) Για το $A = \{1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{R}^+$

$$3x \le y \Rightarrow x \neq y$$

$$x \le y \wedge y \le z \Leftrightarrow [3x \le y \vee x = y] \wedge$$

$$\wedge [3y \le z \vee y = z]$$

$$\Leftrightarrow [(3x \le y \vee x = y) \wedge 3y \le z] \vee$$

$$\vee [(3x \le y \vee x = y) \wedge y = z]$$

$$\Leftrightarrow (3x \le y \wedge 3y \le z) \vee (x = y \wedge 3y \le z)] \vee$$

$$\vee [(3x \le y \wedge y = z) \vee (x = y \wedge y = z)]$$

$$\Rightarrow (3x \le z) \vee (3x \le z) \vee$$

$$(3x \le z) \vee (x = z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x \le z \vee x = z$$

$$\Leftrightarrow x \le z$$

μεταβατική

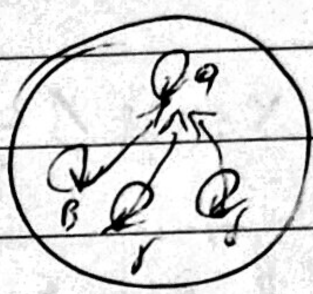
άρα διάταξη

μη γραμμική

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$(\forall x \in A)\ x \leq 15$

1 μεγιστο
3 ψευδοελαχιστα



$A = \{α, β, γ, δ\}$

α $\{(α,α), (β,β), (δ,δ), (γ,γ), (β,α), (γ,α), (δ,α)\}$

Ασκηση

$\{\{α\}, \{α,β\}, \{α,γ\}, \{α,β,γ\}, \{δ\}\}$

$\underline{o}$ Ε, σ, ρ ισοδυναμίες στο Ε

i) Ν.δ.ο $σ \cap ρ$ ισοδυναμίες στο Ε

ii) $(\forall x \in E)\ κλ_{σ\cap ρ}(x) = κλ_σ(x) \cap κλ_ρ(x)$

x τυχόν

$(x,x) \in \sigma \land (x,x) \in r$

$\Rightarrow (x,x) \in \sigma \cap r$

x, y τυχόντα: $(x,y) \in \sigma \cap r \Leftrightarrow (x,y) \in \sigma$
$\land (x,y) \in r \overset{\sigma, r \text{ συμμετρ.}}{\Leftrightarrow} (y,x) \in \sigma \land (y,x)$
$\in r \Longrightarrow \in \sigma \cap r$

x, y, z τυχόντα: $(x,y) \in \sigma \cap r \land (y,z) \in \sigma \cap r$
$\Longleftrightarrow \big((x,y) \in \sigma \land (x,y) \in r\big) \land$

$\land \big((y,z) \in \sigma \land (y,z) \in r\big)$

$\Leftrightarrow \big((x,y) \in \sigma \land (y,z) \in \sigma\big) \land$

$\big((x,y) \in r \land (y,z) \in r\big) \xRightarrow{\sigma, r \text{ μεταβ}}$

$(x,z) \in \sigma \land (x,z) \in r \Leftrightarrow (x,z) \in \sigma \cap r$

★ Άσκ: $\left.\begin{array}{l} \sigma \cup r \\ \sigma - r \\ \sigma + r \end{array}\right\}$ είναι ισοδυναμίες;